

Physique II – Thermodynamique

Solutions 7

PROBLÈME I CYCLE DU MOTEUR DIESEL

1. Selon les propriétés d'une transformation adiabatique, on peut exprimer p_2 en fonction de p_1 ,

$$p_2 V_2^\gamma = p_1 V_1^\gamma \Rightarrow p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma$$

En plus, $p_3 = p_2$ (processus isobare) et $V_4 = V_1$ (processus isochore). Donc,

$$p_4 V_4^\gamma = p_3 V_3^\gamma \Rightarrow p_4 = p_3 \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^\gamma = p_2 \left(\frac{V_3}{V_1} \right)^\gamma = p_1 \left(\frac{V_3}{V_2} \right)^\gamma$$

2. La variation de l'entropie ΔS est donné par l'expression $\Delta S = \int \frac{1}{T} \delta Q$. Donc,

$$\begin{aligned} \Delta S_{12} &= \int_1^2 \frac{1}{T} \delta Q = \int_1^2 \frac{0}{T} = 0, \\ \Delta S_{23} &= \int_2^3 \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_2}^{T_3} \frac{dH}{T} = \int_{T_2}^{T_3} \frac{n C_{p,m} dT}{T} = n C_{p,m} \ln \left(\frac{T_3}{T_2} \right) = n C_{p,m} \ln \left(\frac{V_3}{V_2} \right), \\ \Delta S_{34} &= \int_3^4 \frac{\delta Q}{T} = \int_3^4 \frac{0}{T} = 0, \text{ et} \\ \Delta S_{41} &= \int_4^1 \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_4}^{T_1} \frac{dU}{T} = \int_{T_4}^{T_1} \frac{n C_{V,m} dT}{T} = n C_{V,m} \ln \left(\frac{T_1}{T_4} \right) \\ &= n C_{V,m} \ln \left(\frac{p_1}{p_4} \right) = n C_{V,m} \ln \left(\frac{V_3}{V_2} \right)^{-\gamma} = -n \gamma C_{V,m} \ln \left(\frac{V_3}{V_2} \right) = -n C_{p,m} \ln \left(\frac{V_3}{V_2} \right). \end{aligned}$$

Ce qui implique que $\Delta S = \Delta S_{12} + \Delta S_{23} + \Delta S_{34} + \Delta S_{41} = 0$ qui découle du fait que l'entropie est une fonction d'état.

3. La variation de l'énergie interne est dans tous les cas donnée par :

$$\Delta U_{if} = \int_i^f n C_{V,m} dT = n C_{V,m} (T_f - T_i) = \frac{C_{V,m}}{R} (p_f V_f - p_i V_i)$$

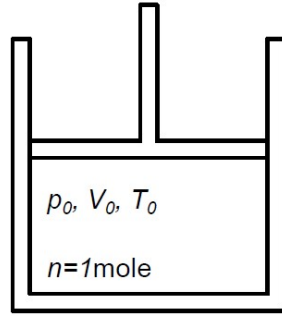
Donc,

$$\begin{aligned}\Delta U_{12} &= \frac{C_{V,m}}{R}(p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{C_{V,m}}{R} p_1 \left(\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma V_2 - V_1 \right), \\ \Delta U_{23} &= \frac{C_{V,m}}{R}(p_3 V_3 - p_2 V_2) = \frac{C_{V,m}}{R} p_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma (V_3 - V_2), \\ \Delta U_{34} &= \frac{C_{V,m}}{R}(p_4 V_4 - p_3 V_3) = \frac{C_{V,m}}{R} p_1 \left(\left(\frac{V_3}{V_2} \right)^\gamma V_1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma V_3 \right), \text{ et} \\ \Delta U_{41} &= \frac{C_{V,m}}{R}(p_1 V_1 - p_4 V_4) = \frac{C_{V,m}}{R} p_1 \left(V_1 - \left(\frac{V_3}{V_2} \right)^\gamma V_1 \right).\end{aligned}$$

Ce qui implique que $\Delta U = \Delta U_{12} + \Delta U_{23} + \Delta U_{34} + \Delta U_{41} = 0$ qui découle du fait que l'énergie interne est une fonction d'état.

PROBLÈME II CYLINDRE CALORIFUGÉ (EXAMEN 2016)

1. Le système est le suivant :



Piston bloqué $\Rightarrow V = \text{constante} = V_0$
Transformation isochore .

On passe (p_0, V_0, T_0) à $(p_1, V_1, T_1) = (p_1, V_0, 3T_0)$

$$p_1 V_1 = nRT_1 \Rightarrow p_1 = \frac{nRT_1}{V_1} = 3p_0$$

$$Q = C_v \Delta T = C_v (3T_0 - T_0) = 2C_v T_0$$

soit

$$Q = 2 \frac{nR}{\gamma - 1} T_0 = 2 \frac{p_0 V_0}{\gamma - 1}$$

2. Le piston est lâché brutalement \Rightarrow le système ne passe pas par une succession d'états d'équilibre \Rightarrow la transformation est irréversible.

3. La transformation est adiabatique irréversible \Rightarrow la loi de Laplace $pV^\gamma = \text{cst}$ ne marche pas!

Mais on sait que durant toute la transformation $p_2 = p_0 = p_{\text{ext}}$

Comme on a une transformation adiabatique : $Q = 0$.

Pour un gaz parfait : $\Delta U = C_v \Delta T = C_v (T_2 - T_1)$.

De plus $\Delta U = Q + W = W = -p_{\text{ext}} \Delta V = -p_0 (V_2 - V_1)$.

On a donc $C_v (T_2 - T_1) = -p_0 (V_2 - V_1)$

et de plus $p_0 V_2 = p_2 V_2 = nRT_2$ et $C_v T_2 - C_v T_1 = -nRT_2 + p_0 V_1$.

$(C_v + nR) T_2 = C_v T_1 + p_0 V_1 = 3C_v T_0 + nRT_0 = T_0 (3C_v + nR)$

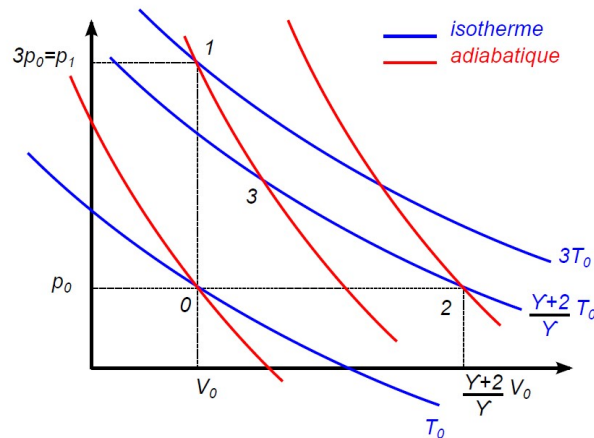
d'où :

$$T_2 = T_0 \frac{3C_v + nR}{C_v + nR} = T_0 \frac{3 \frac{nR}{\gamma-1} + nR}{\frac{nR}{\gamma-1} + nR} = T_0 \frac{3 + \gamma - 1}{1 + \gamma - 1}$$

soit finalement :

$$T_2 = T_0 \frac{\gamma + 2}{\gamma} \Rightarrow V_2 = V_0 \frac{\gamma + 2}{\gamma}$$

4. Les points sur le diagramme (p, V) sont représentés ci-dessous (graphique qualitatif) :



Note importante : l'adiabatique réversible qui passe par l'état 1 coupe p_0 à une température inférieure à T_2 car la transformation $1 \rightarrow 2$ est irréversible \Rightarrow entropie.

5. Création d'entropie lors de la transformation $1 \rightarrow 2$:

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = S_2 - S_1 = S_{\text{créée}} + \underbrace{S_{\text{échangée}}}_{0 \text{ (adiabatique)}}$$

Pour calculer $\Delta S_{1 \rightarrow 2}$, comme il s'agit d'une fonction d'état sa valeur ne dépend pas du chemin entre les états 1 et 2. On choisit donc une transformation réversible allant de 1 et 2 et passant par 3 (voir figure) en suivant une adiabatique réversible puis une isotherme réversible :

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = \underbrace{\Delta S_{1 \rightarrow 3}}_{0 \text{ (adiabatique)}} + \underbrace{\Delta S_{3 \rightarrow 2}}_{\Delta S_{\text{isotherme}} = \frac{Q_{3 \rightarrow 2}}{T_2}}$$

$$Q_{3 \rightarrow 2} = -W_{3 \rightarrow 2} = \int_3^2 p dV = \int_3^2 nRT_2 \frac{dV}{V} = nRT_2 \ln \frac{V_2}{V_3}$$

$$\Delta S_{3 \rightarrow 2} = nR \ln \frac{V_2}{V_3}$$

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1} \implies V_3 = V_1 \left(\frac{T_1}{T_3} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

PROBLÈME III CYCLE CALORIFIQUE

On a que $C_{V,m} = cR$ et $C_{p,m} = (c+1)R$.

1. A l'aide de la condition d'adiabacité, le volume V_2 s'écrit :

$$V_2 = V_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

Également, la transformation $2 \rightarrow 3$ est une isobare :

$$V_2 = V_3 \frac{T_2}{T_3}$$

2. La chaleur échangée durant une compression isobare s'écrit,

$$Q_{23} = \Delta H_{23} = \int_{H_2}^{H_3} dH = (c+1)nR \int_{T_2}^{T_3} dT = (c+1)nR (T_3 - T_2)$$

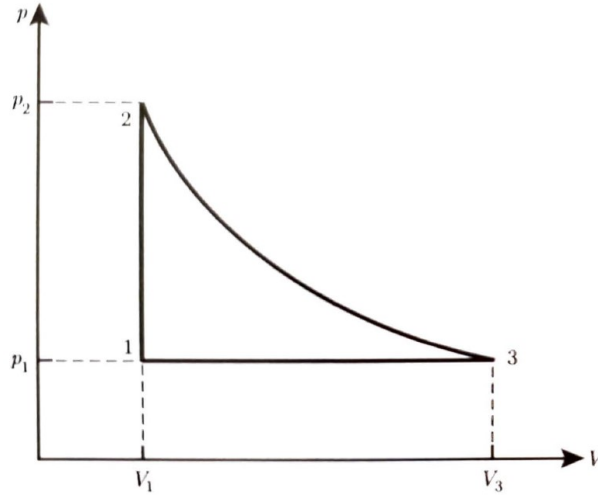
3. La variation d'entropie durant la compression isobare est donnée par,

$$\Delta S_{23} = \int_{S_2}^{S_3} dS = (c+1)nR \int_{T_2}^{T_3} \frac{dT}{T} = (c+1)nR \ln \left(\frac{T_3}{T_2} \right)$$

PROBLÈME IV CYCLE DE LENOIR

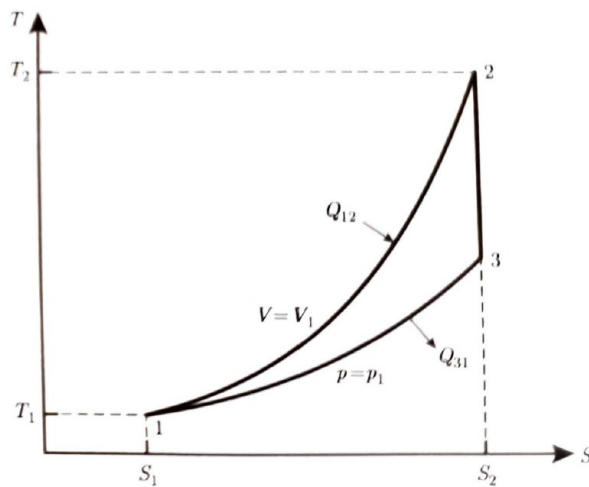
1. (a) Pour le diagramme (p, V) on a :

- Pour le processus isochore, $V = V_1 = V_2 = \text{cste}$.
- Pour le processus adiabatique, $p(V) = \text{cste} / V^\gamma$ où $\gamma > 1$ et $\text{cste} = p_2 V_2^\gamma = p_3 V_3^\gamma$.
- Pour le processus isobare, $p(V) = p_3 = p_1 = \text{cste}$.



(b) Pour le diagramme (T, S) on a :

- Pour le processus isochore, $T(S) = T_1 \exp((S - S_1) / cnR)$.
- Pour le processus adiabatique, $S = S_2 = S_3 = \text{cste}$.
- Pour le processus isobare, $T(S) = T_1 \exp((S - S_1) / (c + 1)nR)$.



2. Le travail effectué durant le processus isochore s'annule et donc :

$$\Delta S_{12} = cnR \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)$$

3. La chaleur échangée durant le processus isochore s'écrit,

$$Q_{12} = \Delta U_{12} = \int_{U_1}^{U_2} dU = cnR \int_{T_1}^{T_2} dT = cnR (T_2 - T_1)$$

Ainsi,

$$T_2 = T_1 + \frac{Q_{12}}{cnR}$$

4. A l'aide de l'équation d'état du gaz parfait, la pression p_2 est donnée.

$$p_2 = \frac{nRT_2}{V_2} = \frac{nR}{V_1} \left(T_1 + \frac{Q_{12}}{cnR} \right) = p_1 + \frac{Q_{12}}{cV_1}$$

5. Pour un processus adiabatique,

$$p_3 = p_2 \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^\gamma$$

6. Le travail effectué durant le processus adiabatique est donné par,

$$W_{23} = \Delta U_{23} = cnR \int_{T_2}^{T_3} dT = cnR (T_3 - T_2)$$

et il n'y a pas de chaleur échangée,

$$Q_{23} = \int_2^3 T dS = 0$$

7. Le travail effectué durant un processus isobare peut s'écrire,

$$W_{31} = - \int_3^1 p dV = -p_1 \int_{V_3}^{V_1} dV = -p_1 (V_1 - V_3) = nR (T_3 - T_1)$$

et la chaleur échangée est donnée par,

$$Q_{31} = \Delta H_{31} = \int_{H_3}^{H_1} dH = (c+1)nR \int_{T_3}^{T_1} dT = (c+1)nR (T_1 - T_3)$$

Ce transfert de chaleur n'a pas lieu durant un processus isotherme. Ainsi, il ne peut pas être décrit par un transfert de chaleur à un réservoir thermique.

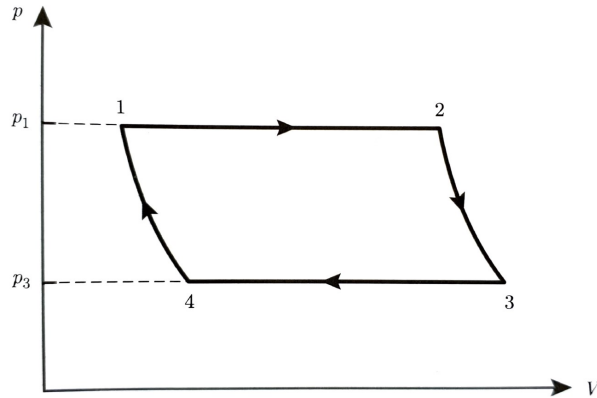
8. A l'aide des résultats obtenus ci-dessus et compte tenu du coefficient $\gamma = (c + 1)/c$, le rendement η_L du cycle de Lenoir s'écrit,

$$\begin{aligned}\eta_L &= -\frac{W_{23} + W_{31}}{Q_{12}} = \frac{c(T_2 - T_3) + (T_1 - T_3)}{c(T_2 - T_1)} \\ &= \frac{T_1 + cT_2 - (c + 1)T_3}{c(T_2 - T_1)} = \frac{(\gamma - 1)T_1 + T_2 - \gamma T_3}{T_2 - T_1}\end{aligned}$$

$$\boxed{\eta_L = 1 - \gamma \frac{T_3 - T_1}{T_2 - T_1}}$$

PROBLÈME V CYCLE DE RANKINE

1. Pour les processus isobares, $p(V) = p_1 = p_2 = \text{cste}$ ou $p(V) = p_3 = p_4 = \text{cste}$. Pour les processus adiabatiques, $p(V) = \text{cste} / V^\gamma$ ou $\gamma > 1$ et $\text{cste} = p_1 V_1^\gamma = p_4 V_4^\gamma$ ou $\text{cste} = p_2 V_2^\gamma = p_3 V_3^\gamma$.



2. Les travaux effectués durant la détente isobare et la compression isobare sont donnés par,

$$\begin{aligned}W_{12} &= -\int_1^2 p dV = -p_1 \int_{V_1}^{V_2} dV = -p_1 (V_2 - V_1) = -nR(T_2 - T_1) \\ W_{34} &= -\int_3^4 p dV = -p_3 \int_{V_3}^{V_4} dV = -p_3 (V_4 - V_3) = -nR(T_4 - T_3)\end{aligned}$$

Les travaux effectués durant la détente adiabatique et la compression adiabatique sont donnés par,

$$\begin{aligned}W_{23} &= \Delta U_{23} = cnR \int_{T_2}^{T_3} dT = cnR(T_3 - T_2) \\ W_{41} &= \Delta U_{41} = cnR \int_{T_1}^{T_4} dT = cnR(T_1 - T_4)\end{aligned}$$

Le travail effectué par cycle est donné par,

$$\begin{aligned} W &= W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41} \\ &= -nR(T_2 - T_1) - nR(T_4 - T_3) + cnR(T_3 - T_2) + cnR(T_1 - T_4) \\ &= Rn(c+1)(T_1 - T_2 + T_3 - T_4) \end{aligned}$$

3. La chaleur échangée durant la détente isobare est donnée par,

$$Q^+ = Q_{12} = \Delta H_{12} = \int_{H_1}^{H_2} dH = (c+1)nR \int_{T_1}^{T_2} dT = (c+1)nR(T_2 - T_1)$$

4. A l'aide de la définition du rendement, on obtient,

$$\eta_R = -\frac{W}{Q^+} = -\frac{W}{Q_{12}} = -\frac{T_1 - T_2 + T_3 - T_4}{T_2 - T_1} = 1 - \frac{T_3 - T_4}{T_2 - T_1}$$

PROBLÈME VI THERMALISATION ET RÉVERSIBILITÉ

1. Une transformation est dite réversible quand le système et l'environnement extérieur peuvent être ramenés à l'état initial en échangeant un travail mécanique $-W$ et une quantité de chaleur $-Q$, où W et Q sont le travail et la quantité de chaleur échangées lors du passage de l'état initial à l'état final.
2. Pour passer de l'état 1 (température T_1) à l'état 2 (température T_2) le travail échangé est $W = 0$ et la quantité de chaleur échangée est Q . Pour la transformation inverse, c'est-à-dire pour passer de l'état 2 (température T_2) à l'état 1 (température T_1), on peut imaginer de remettre le corps en contact avec la source chaude T_1 . Le travail et la chaleur échangées sont $W = 0$ et $-Q$. La transformation est tout de même irréversible : pour qu'elle soit réversible, aussi bien le système que l'environnement extérieur doivent pouvoir être ramenés à l'état initial. Dans ce cas, le corps revient à l'état initial mais pas les sources chaudes, car celle à T_1 a échangée une quantité de chaleur $-Q$ et celle à T_2 une quantité de chaleur Q .
3. Les deux transformations isochores sont obtenues par thermalisation avec une source chaude et une froide. Dans le cas sans régénérateur on est dans le même cas que la question 2 et le cycle n'est donc pas réversible. Si par contre on a un régénérateur, les chaleurs échangées lors des isochores se compensent et le cycle est réversible.

PROBLÈME VII COORDONNÉES (T, S)

1. Pour répondre à cette question, il nous faut utiliser une fonction auxiliaire. L'énoncé suggère d'utiliser p et T comme variables. C'est donc l'enthalpie H qui est la "bonne" fonction :

$$dH = T dS + V dp = C_p dT \quad (\text{gaz parfait})$$

Il vient alors :

$$dS = \frac{C_p dT}{T} - \frac{V dp}{T}$$

et comme $pV = nRT \Rightarrow \frac{V}{T} = \frac{nR}{p}$,

$$dS = C_p \frac{dT}{T} - nR \frac{dp}{p}$$

Ainsi,

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - nR \ln \frac{p_2}{p_1}$$

2. S est une fonction d'état, donc ne dépend pas du chemin suivi :

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2}^{irr} = \Delta S_{1 \rightarrow 2}^{rev} = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - nR \ln \frac{p_2}{p_1}$$

3. Pour une isobare, $p = \text{cste} = p_1$, donc (p_1, T_1) devient (p_1, T) .

$$\Delta S = S(p_1, T) - S_1 = C_p \ln \frac{T}{T_1} - 0$$

On cherche T en fonction de S pour p_1 fixe (isobare en coordonnées (T, S))

$$\ln \frac{T}{T_1} = \frac{S - S_1}{C_p} \Rightarrow T = T_1 e^{\frac{S - S_1}{C_p}}$$

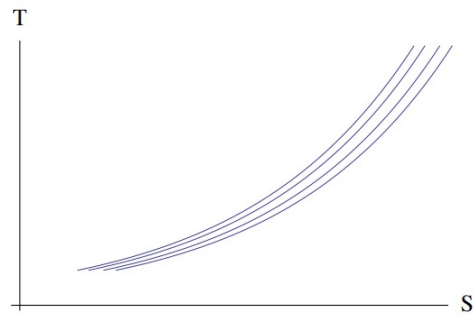
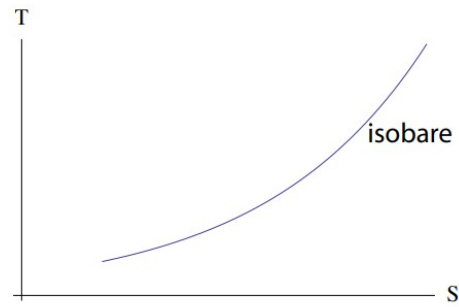
C'est une fonction exponentielle...

On repart de l'expression de dS :

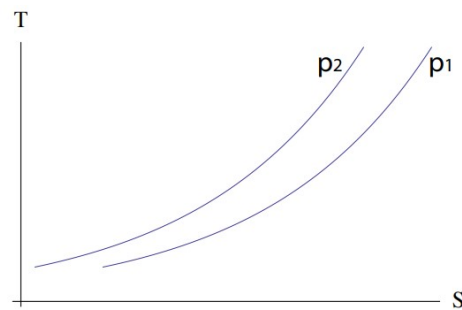
$$dS = C_p \frac{dT}{T} - nR \frac{dp}{p} \quad \text{isobare} \Rightarrow dp = 0$$

$$dS = C_p \frac{dT}{T} \Rightarrow \left(\frac{dT}{dS} \right)_{isob} = \frac{T}{C_p}$$

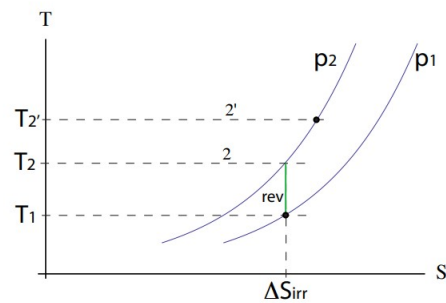
$\frac{dT}{dS}$ est la pente de l'isobare. Pour T donné, elle est la même quel que soit p . A T donnée, toutes les isobares ont la même pente. Les isobares peuvent se déduire les unes des autres par translation horizontale.



4. Pour $T = cst$, $\Delta S_{1 \rightarrow 2} = -nR \ln \frac{p_2}{p_1}$, donc si $p_2 > p_1$, $\Delta S_{1 \rightarrow 2} < 0$. Dans ces conditions, l'isobare p_2 est à gauche de l'isobare $p_1 \dots$



5. Pour une adiabatique réversible, $\Delta S = 0$. Il s'agit d'une verticale en coordonnées (T, S)



6. Nous avons maintenant une transformation adiabatique irréversible, avec $\Delta S_{irr} > 0$. L'état final sera différent : p_2 sera identique, mais la température sera T'_2 . Comme $\Delta S_{irr} > 0$, le point 2' est à droite, donc $T'_2 > T_2$. Par contre, on ne peut pas, pour une transformation irréversible, en toute rigueur, tracer la ligne qui joint les deux points indiquant la situation initiale et finale. En effet, le système ne passe pas par une série d'états d'équilibre, les variables d'état telles que la température ne sont pas définies.